

Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben

Prof. Dr. Peter Koepke

Serie 5

Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 16 (4 Punkte). Es sei $S_{GM} = \{\preceq\}$ eine erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol und Γ_{GM} die Menge der folgenden S_{GM} -Formeln.

- (a) $\forall x \ x \preceq x$.
- (b) $\forall x \ \forall y \ \forall z \ [(x \preceq y \wedge y \preceq z) \longrightarrow x \preceq z]$.
- (c) $\forall x \ \forall y \ \exists z \ [x \preceq z \wedge y \preceq z]$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), dass

$$\Gamma_{GM} \vdash \forall x \ \forall y \ \forall z \ \exists w \ [x \preceq w \wedge y \preceq w \wedge z \preceq w].$$

gilt.

Aufgabe 17. Gegeben sei eine erststufige Sprache S , eine nicht-leere Menge I und ein Filter \mathcal{F} auf I .

- (1) (1 Punkte) Beweisen Sie, dass

$$\left(\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i \right) \frac{[g]_{\mathcal{F}}}{x} = \prod_{\mathcal{F}} \left(\mathfrak{M}_i \frac{g(i)}{x} \right)$$

für jede Sequenz $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I \rangle$ von S -Modellen und jedes $g \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge aller S -Formeln φ , die die Äquivalenz

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i \models \varphi \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$$

für jede Sequenz $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I \rangle$ von S -Modellen erfüllen, mit $L_{\mathcal{F}}$.

- (2) (4 Punkte) Beweisen Sie, dass $L_{\mathcal{F}}$ alle atomaren Formeln enthält und unter Konjunktion und \exists -Quantifikation abgeschlossen ist.

Aufgabe 18. Es sei S eine abzählbare, erststufige Sprache und Φ eine Menge von S -Formeln.

- (1) (2 Punkte) Es sei S^+ die erststufige Sprache, die S um ein n -stelliges Funktionssymbol f_{φ} für jede S -Formel φ mit $n + 1$ freien Variablen erweitert, und

$$\Phi^+ = \Phi \cup \{\psi_{\varphi} \mid \varphi \text{ ist eine } S\text{-Formel mit freien Variablen}\},$$

wobei ψ_{φ} die S^+ -Formel

$$\begin{aligned} \forall x_0 \ \dots \ \forall x_{n-1} \ [\exists y \ \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, y) \\ \longrightarrow \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, f_{\varphi}(x_0, \dots, x_{n-1}))] \end{aligned}$$

ist. Beweisen Sie, dass für jedes S -Modell \mathfrak{M} mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ ein S^+ -Modell \mathfrak{M}^+ mit $\mathfrak{M}^+ \models \Phi^+$ und $\mathfrak{M}^+ \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup \text{Var}) = \mathfrak{M}$ existiert.

(2) (3 Punkte) Konstruieren Sie eine abzählbare, erststufige Sprache S^* , die S erweitert, und eine Menge Φ^* von S^* -Formeln mit $\Phi \subseteq \Phi^*$, so dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) Für jede S^* -Formel φ mit $n + 1$ freien Variablen existiert ein S^* -Funktionssymbol f mit

$$\begin{aligned} \Phi^* \models \forall x_0 \dots \forall x_{n-1} [\exists y \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, y) \\ \longrightarrow \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, f(x_0, \dots, x_{n-1}))]. \end{aligned}$$

(b) Für jedes S -Modell \mathfrak{M} mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ existiert ein S^* -Modell \mathfrak{M}^* mit $\mathfrak{M}^* \models \Phi^*$ und $\mathfrak{M}^* \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup \text{Var}) = \mathfrak{M}$.

In diesem Fall sagen wir, dass Φ^* *Skolemfunktionen* besitzt.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Es sei S eine abzählbare, erststufige Sprache, \mathfrak{A} eine S -Struktur und A eine abzählbare Teilmenge von $|\mathfrak{A}|$. Konstruieren Sie eine elementare Substruktur von \mathfrak{A} , deren Trägermenge abzählbar ist und A enthält.

(Tipp: Verwenden Sie die Aufgaben 7 & 18 und betrachten Sie die kleinste Obermenge von A , die unter Skolemfunktionen abgeschlossen ist).